3. Aussagen und Prädikatenlogik

3.1 Aussagenlogik

Zur Aussagenlogik zählen Begriffe wie **Aussage**, **Junktor** und **allgemeingültige Aussage- und Schlussformen**. Alle diese Begriffe sollen im Folgenden erläutert werden.

3.1.1 Aussagen

Eine Aussage meint ein semantisches Gebilde A, dem wir einen Wahrheitswert zuordnen W, der F (falsch) oder W (wahr) annehmen kann. Diese Teilung in wahr und falsch wird auch als Zweiwertigkeitsprinzip bezeichnet. So wäre eine Aussage:

A1: Eine Rose ist eine Pflanze, und der Wahrheitswert wäre W(A1)=W.

Es ist dabei einleuchtend, dass nicht alle Buchstabenreihen auch Aussagen im Sinne der Logik sind, da die Sprache der Logik eine künstliche Sprache ist. So ist ein Befehl oder eine Frage eben keine Aussage. Das Zweiwertigkeitsprinzip macht dies deutlich, da in der Umgangssprache Aussagen mehr oder weniger wahr sein können, es in der Logik allerdings nur wahr oder falsch geben kann.
Dabei muss beachtet werden, dass die Symbole A1, A2,... nur Aussagen repräsentieren und selbst noch keine Aussagen sind, sondern durch Aussagen mit einem Wahrheitswert ersetzt erden können. Von daher bezeichnet man diee Symbole auch als **Aussagenlogische Variablen**.
Logischerweise ist auch die **Negation** einer Aussage eine solche, mit einem entsprechenden Wahrheitswert:

¬A1: Eine Rose ist keine Pflanze, und der Wahrheitswert wäre W(¬A1)=F.

Das Symbol „¬“ meint also, dass eine Aussage A falsch ist, wenn ¬A wahr ist und umgekehrt.

3.1.2 Junktoren

Zur Verknüpfung von Aussagen verwenden wir sog. **Junktoren**, so dass aus zwei Aussagen eine neue wird. Da jede Aussagen zwei mögliche Wahrheitswerte annehmen kann, gibt es bei der Verknüpfung zweier Aussagen vier mögliche Kombinationen von Wahrheitswerten. Diese werden in einer sog. **Wahrheitstafel** abgetragen.

Symbol	Bedeutung	Name
$\wedge$	Und	Konjunktion
$\vee$	Oder	Adjunktion / Disjunktion
$\rightarrow$	Wenn, dann	Implikation
$\leftrightarrow$	Nur dann, wenn (genau dann, wenn)	Äquivalenz

Wahrheitstafel:

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \rightarrow B$	$A \leftrightarrow B$
W	W	W	W	W	W
W	F	F	W	F	F
F	W	F	W	W	F
F	F	F	F	W	W

Wenn also:

- Zwei Aussagen mit und verknüpft werden, so müssen beide Aussagen wahr sein, damit die resultierende Aussage auch wahr ist.
- Zwei Aussagen mit oder verknüpft werden, so muss wenigstens eine Aussage wahr sein, damit die resultierende wahr werden kann.
- Werden zwei Aussagen implikativ, dann ist festgesetzt, dass wenn die erste Aussage wahr ist die zweite nicht falsch werden kann.
- Bei einer äquivalenten Verknüpfung müssen beide Aussagen gleiche Wahrheitswerte besitzen, damit die resultierende Aussage wahr werden kann.

Klammerregeln:

A) Die Negation bindet stärker als die Konjunktion:

$\neg A \wedge B = (\neg A) \wedge B$ (nicht A, aber B)
$\neg A \wedge B$ ist allerdings nicht gleich $\neg(A \wedge B)$!

B) Negation und Konjunktion binden stärker als die Adjunktion

$\neg A \vee B = (\neg A) \vee B$
$A \wedge B \vee C = (A \wedge B) \vee C$ (A und B oder aber C)

C) Negation, Konjunktion und Adjunktion binden stärker als Implikation

$(A \rightarrow B) \wedge \neg B \rightarrow \neg A$ (A impliziert B, und aus nicht B folgt nicht A)

<u>das ist etwas anderes als:</u>

$(A \rightarrow B) \wedge (\neg B \rightarrow \neg A)$ (aus A folgt B, und aus nicht B folgt nicht A)

D) Negation, Konjunktion, Adjunktion und Implikation binden stärker als Äquivalenz.

3.1.3 Allgemeingültige Aussage- und Schlussformen

Unter solchen Allgemeingültigen Aussagen werden solche Aussagen verstanden, die immer wahr sind.
So ist z.B. die Aussage : $A \vee \neg A$ immer wahr und damit allgemeingültig.
Genauso wie : $\neg (A \wedge \neg A)$ eine immer zutreffende Aussage ist.
So ist logischerweise die Aussage: $A \vee B$ nicht allgemeingültig, da mindestens eine Aussage wahr sein muss, sind allerdings zwei falsche Aussagen miteinander verknüpft, ist die Aussage bzw. der Wahrheitswert falsch und damit die Aussage nicht allgemeingültig.
Wenn man solche allgemeingültigen Aussagen, die einen Implikationsjunktor enthalten, in die Form $A \rightarrow B$ bringen kann, dann sprechen wir von **Schlussformen**.
Also aus A folgt B. Zwei der grundlegensten Schlussformen seinen hier erläutert:

Modus ponens: Dieser besagt, dass wenn ich aus A (Empirie) auf B (Theorie) schließen kann und sich A als richtig erweist, dann muss auch B richtig sein. Diese entspricht also dem Prinzip der **Verifikation** wie wir sie bei Carnap finden.

Formal: $[(A \rightarrow B) \wedge A] \rightarrow B$, dies ist in ein **Vorderglied V** $[(A \rightarrow B) \wedge A]$ und ein **Hinterglied H** [B] teilbar, die somit der Abforderung von Schlussformen $[A \rightarrow B]$ genügt, da gilt: $V \rightarrow H$.

Modus tollens: Dieser besagt, dass wenn ich aus einer Theorie A die Aussage B ableiten kann und sich B als falsch erweist, dann muss auch die Theorie falsch sein. Dies entspricht dem **Falsifikationsprinzip** von Popper.

Formal: $[(A \rightarrow B) \neg B] \rightarrow \neg A$, auch hier gilt: $V \rightarrow H$

Wichtig ist, dass die Richtigkeit von B nicht die Richtigkeit von A bedeutet. A ist also lediglich falsifizierbar und **nicht verifizierbar**.

Allgemein gilt, dass mit Hilfe von Schlussformen deduktive Ableitungen von Sätzen aus anderen durchführen, die man dann auf Richtigkeit prüfen kann.

3.2 Prädikaten- und Quantorenlogik

3.2.1 Prädikate und Quantoren

In diesem weiterführenden Schritt werden Prädikate sowie Existenzquatoren und Allquatoren eingeführt. Die Idee, die dahinter steckt ist, dass es mit der Aussagenlogik nicht möglich ist, mehrere Hypothesen und Sachverhalte miteinander zu verknüpfen. So können wir betrachten, dass Aggression zu Frustration führt. Wollen wir dies mit der Tatsache „Fritz wurde frustriert“ verknüpfen, um daraus abzuleiten, dass Fritz aggressiv reagiert, brauchen wir eine innere Struktur des Sachverhaltes. Wir wollen also z.B. Eigenschaften mit Individuen verknüpfen.

Dazu verwenden wir für die Eigenschaften sog. **Prädikatsvariablen** (E, F, G...)und für die Individuen sog. **Individuenvariablen** (x, y, z…). Das ein Individuum männlich ist, kann also als Fx dargestellt werden. Es gibt dann natürlich auch n- stellige Prädikate. Solche differenzieren zwischen mind. Zwei Individuen. Also z.b. „ist größer als".

Als nächstes unterscheiden wir zwei **Quantoren**:

$\forall x$: „für alle Elemente x gilt"	Allquantor
$\exists x$: „für mind. Ein Element x gilt"	Existenzquantor

x stellt dabei eine Variable dar, die einen beliebigen Wert einer Population annehmen kann. Also $x=U=\{u_1, u_2, ...u_n\}$
Wenn wir also ausdrücken wollen, dass alle Individuen aggressiv reagieren (A), wenn man sie Frustriert (F), so können wir dies formalsprachlich als
H: $\forall x\,(Fx \rightarrow Ax)$.
Damit gilt dies auch für alle einzelnen und wir können schreiben:

H: $(Fu_1 \rightarrow Au_1) \wedge (Fu_2 \rightarrow Au_2) \wedge ... \wedge (Fu_n \rightarrow Au_n)$. Daraus können wir dann auch ableiten, dass Fritz aggressiv reagiert, wenn wir ihn Frustrieren.

3.2.2 Schlussformen

Hier wird allgemein zwischen a) **Vereinigungssätzen** und b) **Vertauschbarkeitssätzen** differenziert.

a) Die Aussage, dass nicht alle Elemente die Eigenschaft F haben ist logisch äquivalent zur Aussagen das es mindestens ein Element gibt, auf welches die Aussage zutrifft.
b) Wenn für mindestens ein x angenommen werden kann, dass dann für alle y die Annahme x, y haben die Eigenschaft F gilt, folgt daraus, dass es für jedes y mindestens ein x gibt, dass x und y die Eigenschaft F(x, y) haben. Dabei ist F(x, y) ein zweistelliges Prädikat, wie z.b. *ist größer als*.