Wahrscheinlichkeit

2.10) Was versteht man unter Wahrscheinlichkeit? Wozu kann man den Wahrscheinlichkeitsbegriff in der Wissenschaft verwenden? Was bedeutet subjektive, was objektive Wahrscheinlichkeit?

Was versteht man unter Wahrscheinlichkeit?

Die **Wahrscheinlichkeit** ist ein zahlenmäßiger Ausdruck für einen Grad an Ungewissheit. Sie ist eine Zahl zwischen 0 (= trifft nicht zu; unmögliches Ereignis) und 1 (= Trifft voll zu), mit der man ein Grad der Gewissheit ausdrückt.

•

Wozu kann man den Wahrscheinlichkeitsbegriff in der Wissenschaft verwenden?

Der Wahrscheinlichkeitsbegriff kann dazu verwendet werden, das verhaltensregulierende System von Wahrscheinlichkeiten transparenter und durch Trennung zufälliger von „überzufälligen" Ereignissen präziser zu machen. So können Fehleinschätzungen von Wahrscheinlichkeiten korregiert bzw. neu entdeckte Musterläufigkeiten hinsichtlich ihrer Tragfähigkeit abgesichert werden.

Was bedeutet subjektive, was objektive Wahrscheinlichkeit?

a) Mit dem Begriff „wahrscheinlich" werden in der Umgangssprache subjektive Überzeugungen oder Mutmaßungen über die Sicherheit einmaliger nicht wiederholbarer Ereignisse zum Ausdruckgebracht, die prinzipiell entweder auftreten können oder nicht auftreten können (z.B. das wird schön am Wochenende). Zahlenangaben (das Wetter wird zu 90% schön am Wochenende) die die Stärke der inneren Überzeugung von der Richtigkeit derartiger Behauptungen charakterisieren bezeichnet man als **subjektive Wahrscheinlichkeiten**.

b) „Die Wahrscheinlichkeit, mit einem einwandfreien Würfel eine Sechs zu werfen, beträgt 1/6" oder „die Wahrscheinlichkeit, daß ein beliebiger 16 jähriger Schüler in einem bestimmten Intelligenztest mindestens einen IQ von 120 erreicht, beträgt p = 0,12". Im ersten Beispiel erwartet man bei vielen Würfeln für etwa 1/6 aller Fälle eine Sechs, und im zweiten Beispiel geht man davon aus, daß ca. 12% aller 16 jährigen Schüler in dem angesprochenen Intelligenztest einen Intelligenzquotienten von mindestens 120 erreichen werden. Die erste Aussage basiert auf vielen, voneinander unabhänigen, gleichartigen „Versuchen" mit einem Objekt und die zweite auf jeweils einmaligen „Versuchen" mit vielen gleichartigen Objekten. Zahlenangaben dieser Art heißen **objektive Wahrscheinlichkeiten.**
→ Für die Definition objektiver Wahrscheinlichkeiten ist der Begriff des „Zufallsexperimentes" zentral. Unter einem Zufallsexperiment versteht man einen beliebig oft wiederholbaren Vorgang, der nach einer ganz bestimmten Vorschrift ausgeführt wird und dessen Ergebnis „vom Zufall abhängt", das soll heißen, nicht im voraus eindeutig bestimmt werden kann. Das Ergebnis eines Zufallsexperimentes bezeichnet man als Elementarereignis und die Menge aller mit einem Zufallsexperiment verbundenen Elementarereignisse als **Ereignisraum**. Dies sind z.B. beim Zufallsexperiment „Würfeln" die Augenzahlen 1 bis 6, beim Münzwurf die Ausgänge "„Zahl" oder „Wappen", etc.. Aber auch die Befragung einer Person bezüglich ihrer Parteipräferenz, die Bestimmung der Fehleranzahl in einem Schülerdiktat bezeichnet man als Zufallsexperimente. Deren Elementarereignisse sind zum Zeitpunkt der Befragung existierenden Parteien bzw. aller möglichen Fehlerzahlen. Jedes einzelne Zufallsexperiment führt zu einem bestimmten Elementarereignis, das zu einem Ereignisraum zählt, der für die Art des Zufallsexperimentes charakteristisch ist.

2.11) Nennen Sie die 3 Axiome von Kolmogoroff. Veranschaulichen Sie jedes davon mit einem Beispiel. Was versteht man allgemein in der Wissenschaft unter Axiom? Was haben diese 3 Axiome mit dem Wahrscheinlichkeitsbegriff zu tun?

Nennen Sie die 3 Axiome von Kolmogoroff. Veranschaulichen Sie jedes davon mit einem Beispiel.

1.Axiom:

Jedem zufälligen Ereignis E kann eine bestimmte Zahl p(E) zwischen 0 und 1 zugeordnet werden. Die Grenzen sind dabei mit eingeschlossen. Die Wahrscheinlichkeit ist ein normiertes Maß zw. 0 und 1

$0 \leq p(E) \leq 1$

Die Zahl p(E) wird die *Wahrscheinlichkeit für das Ereignis E* genannt.

***Bsp.:** Wahrscheinlichkeit, dass bei einem genormten Würfel die Zahl 3 gewürfelt wird:*

p(3) = 1/6 = o,1666

2.Axiom:

Die Wahrscheinlichkeit des sicheren Ereignisses Ω [Ω : Ereignisraum] ist gleich 1.

$P(\Omega) = 1$

Das sichere Ereignis schließt immer alle Ausgänge eines Zufallsexperiments ein; z.B. z.B. die Wahrscheinlichkeit, mit einem Würfel eine 1, 2, 3, 4, 5 oder 6 (also der gesamte Ereignisraum Ω) zu würfeln, beträgt $p(1,2,3,4,5,6) = 1$

***Bsp.:** dass der Würfel z.B. auf die Kante fällt ist nicht im Ereignisraum, gilt also nicht. Somit ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Zahl gewürfelt wird gleich 1. P(Zahl) = 1*

3.Axiom:

Für sich gegenseitig ausschließende (können nicht gleichzeitig auftreten) Ereignisse E_1 und E_2 ist die Wahrscheinlichkeit $p(E_1 \cup E_2)$, dass entweder E_1 oder E_2 eintritt,

$p(E_1 \cup E_2) = p(E_1) + p(E_2)$.

In anderen Worten nach Glaser:

Die W. der Vereinigung von unendlich vielen zufälligen Ereignissen, die einander wechselseitig ausschließen, ist gleich der Summe der Einzelwahrscheinlichkeiten dieser Ereignisse.

$$p(A_1 \cup A_2 \cup \ldots A_i \ldots . \cup A_n) = p(A_1) + p(A_2) + \ldots . + p(A_i) + \ldots p(A_n) = \sum_{i=1}^{n} p(A_i) = p\left(\bigcup_{i=1}^{n} (A_i)\right)$$

Die Vereinigung zweier Ereignisse tritt ein, wenn entweder das eine oder das andere Ereignis eintritt.

***Bsp.:** Würfel*   *E_1 = Augenzahl „1" würfeln*

E_2 = Augenzahl „2" würfeln

➔ *Es gilt: $p(E_1 \cup E_2) = p(E_1) + p(E_2)$*

= 1/6 +1/6 = 1/3

Die Wahrscheinlichkeit eine „1" oder eine „2" zu würfeln liegt also bei 1/3

Voraussetzung dafür ist, dass sich die Ereignisse wechselseitig ausschließen!

Was versteht man allgemein in der Wissenschaft unter Axiom?

Definition **Axiom** : allgemeinster Satz einer Theorie, der eines Beweises nicht bedarf. Es ist das Resultat einer freien Setzung, Axiome müssen sich durch ihre Brauchbarkeit bewähren. Axiome dienen dazu, andere Aussagen (Theoreme) aus ihnen abzuleiten.

Was haben diese 3 Axiome mit dem Wahrscheinlichkeitsbegriff zu tun?

Die Axiome von Kolmogoroff machen es möglich, Wahrscheinlichkeiten (sowohl objektive, subjektive als auch ungleich wahrscheinliche Elementarereignisse) mathematisch berechenbar zu machen, indem jedem Elementarereignis eine Zahl zugeordnet wird, die allerdings als Wahrscheinlichkeit die drei Axiome erfüllen müssen.

2.12) Was ist ein Zufallsexperiment? Welche 3 charakteristischen Gegebenheiten definieren ein Zufallsexperiment?

Was ist ein Zufallsexperiment?
Ein Zufallsexperiment ist ein beliebig oft wiederholbarer Vorgang, dessen Ergebnis vom Zufall abhängt.
Jedes Elementarereignis besitzt dabei die gleiche Wahrscheinlichkeit („Gleichwahrscheinlichkeit"), gezogen zu werden bzw. in der Stichprobe vorzukommen.

Welche 3 charakteristischen Gegebenheiten definieren ein Zufallsexperiment?

1. Anordnung
   Durch eine Beschreibung festgelegte reproduzierbare Gegebenheit
   z.B. zwei Würfel, eine Urne mit 30% weißen und 70% schwarzen Kugeln
2. Prozedur
   Festgelegtes Vorgehen innerhalb der Anordnung
   z.B. Würfel werfen und nicht hinlegen, bei der Urne „Ziehen mit Zurücklegen"
3. Unvorhersagbarkeit des Resultats
   Das Ergebnis hängt vom Zufall ab und kann nicht vorhergesagt werden. Mit Hilfe der Wahrscheinlichkeitstheorie sind hier Wahrscheinlichkeitsangaben möglich.

z.B. $p(6) = \frac{1}{6}$; $p(weiße.Kugel) = \frac{3}{7}$

2.13) Was versteht man bei einem Zufallsexperiment unter Elementarereignis, Ereignis und Ereignisraum?

⇨ Zufallsexperiment (oder auch Zufallsbeobachtung): beliebig oft wiederholbarer Vorgang, der nacheiner ganz bestimmten Vorschrift ausgeführt wird und dessen Ergebnis ‚vom Zufall abhängt'

Elementarereignis:
Das Ergebnis eines Zufallsexperiments heißt Elementarereignis. Dies ist zum Beispiel das Ergebnis nach einem Wurf mit einem Würfel.

Ereignis:
Oft interessieren aber nicht die einzelnen Elementarereignisse, sondern Teilmengen/Klassen zusammengefasster Elementarereignisse. Diese nennt man dann Ereignisse. Dies wären in o.g. Bsp. dann alle geraden Augenzahlen beim Würfeln oder alle Herzkarten beim Skatspiel.

Ereignisraum:
Menge aller mit einem Zufallsexperiment verbundenen Elementarereignisse sind der Ereignisraum. Dies wären dann beim Würfeln die Zahlen 1 bis 6 oder beim Münzwurf Zahl oder Adler.
➔ Für die Zusammenfassung oder Verknüpfung von Elementarereignissen gibt es Regeln aus der Mengenlehre.

2.14) In der Wahrscheinlichkeitstheorie hat man eine Reihe von Theoremen aufgestellt. Was versteht man in der Wissenschaft allgemein unter Theorem? Was besagen in der Wahrscheinlichkeitstheorie die Theoreme vom komplementären Ereignis und vom unmöglichen Ereignis sowie das allgemeine Additionstheorem?

Was versteht man in der Wissenschaft allgemein unter Theorem?

- **Allgemein:** Lehrsatz der aus einer wissenschaftlichen Theorie hervor geht
- Der Terminus der **Wahrscheinlichkeitstheorie** bezieht sich meist auf die Anwendung mathematischer Verfahren auf die Beschreibung von Zufallsereignissen, bei denen sich die relativen Häufigkeiten aller möglichen Ergebnisse in einer langen Reihe von Beobachtungen festen Grenzwerten nähern.

➔ Axiom = allgemeinster Satz einer Theorie, die eines Beweises nicht bedarf (müssen aber brauchbar sein)

➔ Theorem = Sätze niedrigerer Allgemeinheit, hergeleitete Theorien (unter Axiom angesiedelt), Aussagen, die aus Axiom abgeleitet werden. Durch Glaser 7 Theoreme bekannt

Was besagen in der Wahrscheinlichkeitstheorie die Theoreme vom komplementären Ereignis und vom unmöglichen Ereignis sowie das allgemeine Additionstheorem?

- **1. Theorem:**

Theorem vom komplementären Ereignis:

Alle Ereignisse, die nicht zum Ereignis A gehören, bezeichnet man zusammengefasst als das entgegengesetzte oder komplementäre Ereignis zu A. Es wird durch „non A“ $\overline{A}$ gekennzeichnet. Die Vereinigung von A und $\overline{A}$ $\left(A \cup \overline{A}\right)$ führt zu einem sicheren Ereignis.

$p\left(\overline{A}\right) = 1 - p(A)$

- **2. Theorem:**

Theorem vom unmöglichen Ereignis:

Ein unmögliches Ereignis kann bei keiner Realisierung eines Zufallsexperimentes stattfinden und wird deshalb mit ⊙ (leere Menge) gekennzeichnet. $p(\Theta) = p\left(\overline{\Omega}\right) = 0$

- **3. Theorem:**

Allgemeines Additionstheorem:

a) die Wahrscheinlichkeit, daß bei einem Zufallsexp. mit den Ereignissen A, B, C, D ... wenigstens eines der beiden Ereignisse A oder D eintrifft, ergibt sich aus der Summe der Wahrscheinlichkeiten für A und D, abzüglich der Wahrscheinlichkeit dafür, daß beide Ereignisse zugleich auftreten.

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

Bsp. 1 und 3 bei einem Wurf mit einem Würfel werfen schließt sich aus

= Additionstheorem für nicht- disjunkte (unvereinbare) Ereignisse

- die Wahrscheinlichkeit, daß eines der disjunkten Ereignisse A_1 oder A_2 oder ...A_k auftritt ist gleich der Summe der Einzelwahrscheinlichkeiten $p(A_1) + p(A_2)$ ... + $p(A_k)$.

= Additionstheorem für disjunkte (vereinbare) Ereignisse

2.15) Was besagt das Bernoulli-Theorem der Wahrscheinlichkeitstheorie?

Das Bernoulli-Theorem verbindet die Konzepte „relative Häufigkeit“ $p_A = \dfrac{n_A}{n}$ und Wahrscheinlichkeit $\pi(A)$.

→ Wenn ein Zufallsexp. n-mal wiederholt wird, lässt sich auszählen, wie häufig ein Ereignis A eingetreten ist. Diese Häufigkeit wird mit n_A bezeichnet. Daraus ergibt sich die relative Häufigkeit

$$p_A = \frac{n_A}{n}$$

→ Bei Durchführung von mehreren Versuchsserien kann man dann feststellen, daß p_A mit wachsendem n auf einen konstanten Wert konvergiert, den man als Wahrscheinlichkeit von A bzw. π(A) bezeichnet

➔ Es beschreibt die Wahrscheinlichkeit für die Häufigkeit des Auftretens einer Klasse in einer Stichprobe von n voneinander unabhängigen Wiederholungen.

Die Wahrscheinlichkeit $\pi(A)$ für ein Ereignis A wird durch die relative Häufigkeit $p_A = \frac{n_A}{n}$ geschätzt, wobei diese Schätzung um so genauer ausfällt, je größer n ist.

$$\text{oder } p(A) = \frac{\text{Anzahl der günstigen Ereignisse A}}{\text{Anzahl der möglichen Ereignisse}}$$

Bei großem n nähert sich die Bernoulli-Verteilung der kontinuierlichen Normalverteilung.

⇨ Das Bernoulli-Theorem stellt die Verbindung der Konzepte relative Häufigkeit $p_A = n_A / n$ und Wahrscheinlichkeit π(A) dar:

Das Theorem besagt: Wenn ein Ereignis A mit best. Wahrscheinlichkeit auftritt und n voneinander unabhängige, gleichartige Zufallsexp. durchgeführt werden, geht die Wahrscheinlichkeit dafür, daß sich die relative Häufigkeit um einen beliebig kleinen Betrag von der Wahrscheinlichkeit unterscheidet gegen Null. Vorausgesetzt n geht gegen unendlich.

2.16 Wie ist die bedingte Wahrscheinlichkeit definiert, und wie definiert man mir ihrer Hilfe die stochastische Unabhängigkeit von Zufallsereignissen? Was besagt das allgemeine Multiplikationstheorem für Wahrscheinlichkeiten, was das Multiplikationstheorem für unabhängige Ereignisse?

Wie ist die bedingte Wahrscheinlichkeit definiert, und wie definiert man mir ihrer Hilfe die stochastische Unabhängigkeit von Zufallsereignissen?

• Die bedingte Wahrscheinlichkeit $p(A/D)$ (lies $p(A)$ unter der Bedingung D) kennzeichnet die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A unter der Bedingung, daß das Ereignis D eingetreten ist.

$$p(A/D) = \frac{p(A \cap D)}{p(D)}$$

analog erhält man dazu:

$$p(D/A) = \frac{p(A \cap D)}{p(A)}$$

➔ Die bedingte Wahrscheinlichkeit bedeutet eine Einschränkung des Ereignisraumes.

➔ Bedingte Wahrscheinlichkeiten sind in der statistischen Entscheidungstheorie von besonderer Bedeutung, da eigentlich jede Wahrscheinlichkeitsaussage an Bedingungen geknüpft ist. Diese betreffen in jedem Falle die Untersuchungsbedingungen, unter denen ein Zufallsexperiment durchgeführt wird. Genaugenommen müsste die Aussage „In diesem Zufallsexperiment hat das Ereignis A eine Wahrscheinlichkeit p(A)“ ersetzt werden durch die Aussage „In diesem Zufallsexperiment hat das Ereignis A eine Wahrscheinlichkeit p(A) vorausgesetzt, das Zufallsexperiment wird korrekt durchgeführt (Ereignis B)“. Da man jedoch meistens davon ausgehen kann, daß diese Voraussetzung erfüllt ist (d.h. daß die Wahrscheinlichkeit eines korrekten Zufallsexperimentes eins ist bzw. p(B) = 1), erhält man statt der bedingten Wahrscheinlichkeit p(A|B) die einfache Wahrscheinlichkeit p(A).

• Die stochastische Unabhängigkeit von Zufallsereignissen ist ein Sonderfall der bedingten Wahrscheinlichkeit. Wenn $p(A \mid B) = p(A)$ bzw. $p(B \mid A) = p(B)$, dann nennt man A und B stochastisch unabhängig.

Was besagt das allgemeine Multiplikationstheorem für Wahrscheinlichkeiten, was das Multiplikationstheorem für unabhängige Ereignisse?

• Allgemeines Multiplikationstheorem für Wahrscheinlichkeiten: Haben 2 Ereignisse A und B in einem Zufallsexperiment die Wahrscheinlichleiten p(A) und p(B), ergibt sich für die Wahrscheinlichkeit, daß beide Ereignisse gemeinsam eintreten, das Produkt der Wahrscheinlichkeiten: $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B \mid A)$ bzw. $p(A \cap B) = p(B) \cdot p(A \mid B)$.

• Multiplikationstheorem für unabhängige Ereignisse: Zwei Ereignisse A und B sind voneinander unabhängig, wenn die Wahrscheinlichkeit für das gemeinsame Auftreten der Ereignisse A und B dem Produkt ihrer Einzelwahrscheinlichkeiten entspricht: $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$

2.17) Was besagt das Bayes-Theorem? Was kann man mit seiner Hilfe berechnen? Wo liegen die praktischen Anwendungen? Wieso kann man behaupten, das Bayes-Theorem sei „die Logik der Diagnostik"? Was hat das Bayes-Theorem mit dem Verhältnis von „Krankheit" und „Symptom" zu tun?

Was besagt das Bayes-Theorem?

Das Bayes-Theorem verknüpft die bedingten Wahrscheinlichkeiten p(A/B) und p(B/A) unter der Verwendung der totalen Wahrscheinlichkeit.

$$p(A/B) = \frac{p(B/A) \times p(A)}{p(B)}$$

lässt sich erweitern zu (wenn p(B) fehlt):

$$p(A/B) = \frac{p(B/A) \times p(A)}{p(B/A) \times p(A) + p(B/\overline{A}) \times p(\overline{A})}$$

⇨ Es stellt eine Alternative zur klassischen Hypothesenprüfung dar.

Was kann man mit seiner Hilfe berechnen?

Das Bayes-Theorem gestattet die Berechnung einer a posteriori- Wahrscheinlichkeit p(B/A) - das ist die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des Ereignisses B unter der Bedingung, dass A bereits eingetreten ist - aufgrund von gegebenen a-priori-Wahrscheinlichkeiten.

P(B/A) sprich: B gegeben A.

Wo liegen die praktischen Anwendungen?

Es findet große Anwendung in der Krankheitsdiagnostik und wird angewandt um zu berechnen mit welcher Wahrscheinlichkeit eine Krankheit bei einem Patienten tatsächlich vorliegt, wenn er eine bestimmte Symptomatik zeigt. Dabei muß die Wahrscheinlichkeit dieser Symptomatik bei der bestimmten Krankheit bekannt sein und die Wahrscheinlichkeit der Symptomatik bei anderen Krankheiten und die apriori- W. der Krankheit selbst muß auch bekannt sein.

➔ So kann man z.B. bei einem Krebsvorsorgetest, der positiv ausgefallen ist, sagen mit welcher Wahrscheinlichkeit der Patient tatsächlich an Krebs leidet.

Wieso kann man behaupten, das Bayes-Theorem sei „die Logik der Diagnostik"?

Das Wissen des Experten hat die Struktur p(Symptom gegeben Krankheit). In der diagnostischen Situation ist das Symptom gegeben. Die Diagnose besteht dann in der Herleitung von p(Krankheit gegeben Symptom). Das geschieht meistens als intuitive Wissensnutzung, nicht als explizite Berechnung.

⇨ Das Bayes-Theorem wird als „Logik der Diagnostik" bezeichnet, weil man durch das Theorem aufgrund von Beobachtungsdaten Wahrscheinlichkeiten korrigieren kann und damit diagnostische Entscheidungen optimieren kann.

Was hat das Bayes-Theorem mit dem Verhältnis von „Krankheit“ und „Symptom“ zu tun?

Verhältnis von "Krankheit" und "Symptom":

Bei bekannter Wahrscheinlichkeit $p(S|K)$ einer bestimmten Symptomatik S bei einer bestimmten Krankheit, bekannter Wahrscheinlichkeit $p(S|\neg K)$ des Auftretens dieser Symptomatik bei allen anderen Krankheiten und bekannter a priori Wahrscheinlichkeit $p(K)$ der Krankheit K kann die Wahrscheinlichkeit $p(K|S)$ ausgerechnet werden, also die Wahrscheinlichkeit, daß ein Patient an der Krankheit K leidet, wenn er die Symptomatik S zeigt.