Punkt und Intervallschätzung

3.3 Was versteht man unter Punkt-, was unter Intervallschätzung?

Die Schätzung von Populationsparametern durch einen einzigen Wert, der aus den beobachteten Daten ermittelt wurde, bezeichnet man als ***Punktschätzung***. Man muss aber davon ausgehen, dass diese Schätzungen schwanken. Damit ist aber die Frage offen, was wir über einen unbekannten Parameter wissen, wenn uns nur das Ergebnis einer Stichprobenuntersuchung bekannt ist.

Deshalb gibt es ein ***zusätzliches Intervall*** (durch möglichen Zufallsfehler) .
Das ***Konfidenzintervall*** kennzeichnet dabei denjenigen Bereich eines Merkmals, in dem sich 95% (99%) aller möglichen Populationsparameter befinden, die den empirisch ermittelten Stichprobenkennwert erzeugt haben können. Dabei spielt der Stichprobenumfang eine große Rolle, die Halbierung eines Konfidenzintervalls macht beispielsweise einen vierfachen Stichprobenumfang erforderlich.

3.4 Bei der Punktschätzung gibt es 2 wichtige Methoden: die Methode der kleinsten Quadrate und die Maximum-Likelihood-Methode. Erklären Sie deren Prinzip.

Methode der kleinsten Quadrate:
Man sucht nach einem Wert a als Schätzer für den Populationsmittelwert μ mit folgender Eigenschaft:
a soll so sein, dass er alle Werte der Stichprobe in der Weise repräsentiert, dass die Summe der quadrierten Abweichungen der Werte von a ein Minimum ergibt.
Also: $\mathbf{f(a) = \sum (x_i - a)^2 = min}$
Nach Differenzierung dieses Ausdrucks nach a und einer Ableitung kommt man zu:

$$a = \frac{\sum x_i}{n} = AM$$

[Man setzt die Ableitung 0 (um den Tiefpunkt zu erhalten)]
⇨ Somit entspricht der gesuchte Wert a dem arithmetischen Mittel, der also der beste Schätzer ist

Maximum-Likelihood-Methode:
Mit dieser Methode findet man für die Schätzung unbekannter Parameter Stichprobenwerte, die so sind, dass sie die Wahrscheinlichkeit (likelihood) des Auftretens der in einer Stichprobe beobachteten Messungen maximieren. Hier muß die Verteilungsform des untersuchten Materials bekannt sein. Bei einer Normalverteilung ist auch nach dieser Methode der beste Schätzer das arithmetische Mittel für μ.

Auch hier bedient man sich wieder der Differenzialrechnung (nach Differenzierung wie bei Methode der kleinsten Quadrate). Man definiert eine Wahrscheinlichkeitsfunktion L, die nach dem gesuchten Parameter x differenziert wird.

$$L(k / n\pi) = \binom{n}{k} \times \pi^k \times (1-\pi)^{n-k}$$

Und leitet dann weiter ab
Setzt man die erste Ableitung gleich 0 und löst sie nach x auf, so ergibt sich x = k/n
Sind also eine Hypothese H und ein Ereignis/Datum D gegeben, so ist die Wahrscheinlichkeit p (D/H) = L(H/D). ***Bieten sich mehrere Hypothesen an, ein Datum zu erklären, dann wähle ich diejenige aus, unter der das Datum die höchste Wahrscheinlichkeit hat.***

*Man spricht dabei von **Likelihood** und nicht von Wahrscheinlichkeit, da x jeden beliebigen Wert in den Grenzen 0 bis 1 annehmen kann, die Summe der Likelihoods also gegen unendlich geht. Dies ist nicht mit der Axiomatik von Wahrscheinlichkeiten vereinbar, die besagt, dass die Summe der Wahrscheinlichkeiten einander ausschließender Ereignisse eines Ereignisraumes = 1 ist.*

Erschöpfende Kennwerte sind gleichzeitig Maximum-Likelihood-Schätzungen (nicht bei Erwartungstreue!).= Erschöpfende, statistische Kennwerte wie z.B. AM oder die Varianz s^2 sind auch nach Maximum-Likelihood-Schätzungen der Parameter μ und σ^2.
Max.-Likelihood- Schätzungen sind aber <u>nicht</u> gleichzeitig erwartungstreue Schätzungen.

3.5 Für die Beurteilung von Schätzern gibt es vier Kriterien: Erwartungstreue, Konsistenz, Effizienz und Suffizienz. Was bedeuten sie?

<u>Erwartungstreue</u>: [≈ Wenn = Erwartungswert]

Eine Statistik schätzt einen Parameter Erwartungstreu, wenn der Erwartungswert dem Parameter entspricht

$$E(x_{quer}) = E\left(1/n \sum x_i\right) = \mu$$

→ *Mittelwerte sind Erwartungstreu*

$$E\left(\sigma_{geschätzt}^2\right) = E\left[\sum (x_i - x_{quer})^2 / n-1\right] = \sigma$$

→ *Varianzen sind Erwartungstreu*

Werden Zufallsstichproben aus einer beliebig symmetrisch verteilten Grundgesamtheit gezogen, ist auch der Stichproben**median**wert ein erwartungstreuer Schätzer des AM in der Grundgesamtheit, d.h. AM der Medianwerteverteilung ist dann gleich μ.
Der **Modal**wert ist dann ein erwartungstreuer Schätzer des AM der Grundgesamtheit, wenn die Grundgesamtheit symmetrisch und unimodal verteilt ist wie bei einer Normalverteilung.
Die Varianz s^2 einer Stichprobe dagegen schätzt die Populationsvarianz σ^2 nicht erwartungstreu. Somit schätzt auch die Standardabweichung s den Populationsparameter σ nicht erwartungstreu (nur erwartungstreu, wenn $n \to \infty$).

<u>Konsistenz</u>: [≈ Je größer eine Stichprobe ist um so genauer ist sie]

Ein Schätzer ist Konsistenz, wenn seine Streuung um den Parameter mit wachsendem Stichprobenumfang geringer wird

→ *Mittelwert/Varianz sind konsistent*

→Konsistenzbedingung:
p (|Schätzwert - Parameter|<ε) → 1
für **n** → ∞
Ein Schätzwert ist konsistent, wenn die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Absolutbetrag der Differenz zwischen dem Parameter und dem Schätzwert kleiner als jede bliebige, reelle Zahl ε ist, mit wachsendem Stichprobenumfang gegen 1 geht. Daher ist die Standardabweichung einer Stichprobe eine konsistente Schätzung des Parameters σ, obwohl sie nicht erwartungstreu ist. → Das AM ist dagegen sowohl erwartungstreu als auch konsistent.

<u>Effizienz</u>: [≈ Präzision]

Von mehreren Schätzern bezeichnet man denjenigen effizient, der bei einer gegebenen Stichprobengröße die geringste Varianz um den Parameter aufweist.

→ *Mittelwert/Varianz sind effizient*

Die Effizienz eines Schätzers kennzeichnet die Präzision, mit der ein Populationsparameter geschätzt werden kann. Sie ist durch die Varianz der Stichprobenkennwerteverteilung (bzw. dem Quadrat des Standardfehlers) gekennzeichnet.
Je größer die Varianz, deso geringer die Effizienz des entsprechenden Schätzwertes.

<u>Suffizienz</u>: [≈ Allumfassend]

Erschöpfend ist ein Schätzer, wenn er alle in den Daten enthaltenden Informationen Berücksichtigt, , so dass durch Berechnung eines weiteren statistischen Kennwertes keine zusätzliche Information über den zu schätzenden Parameter gewonnen werden kann.

→ *Mittelwert/Varianz sind erschöpfend (der Median nicht)*