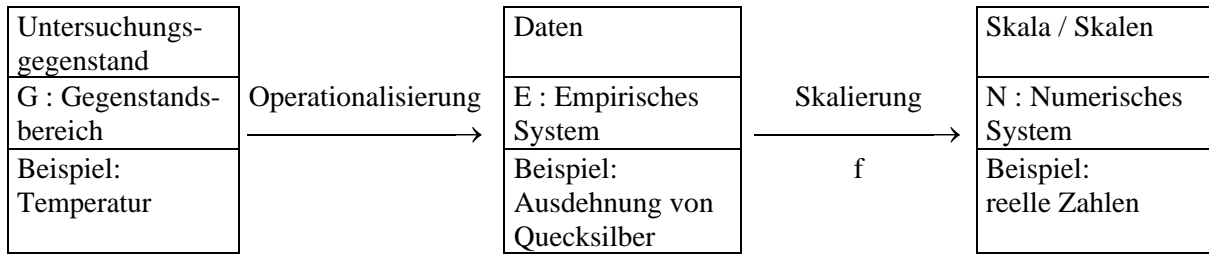
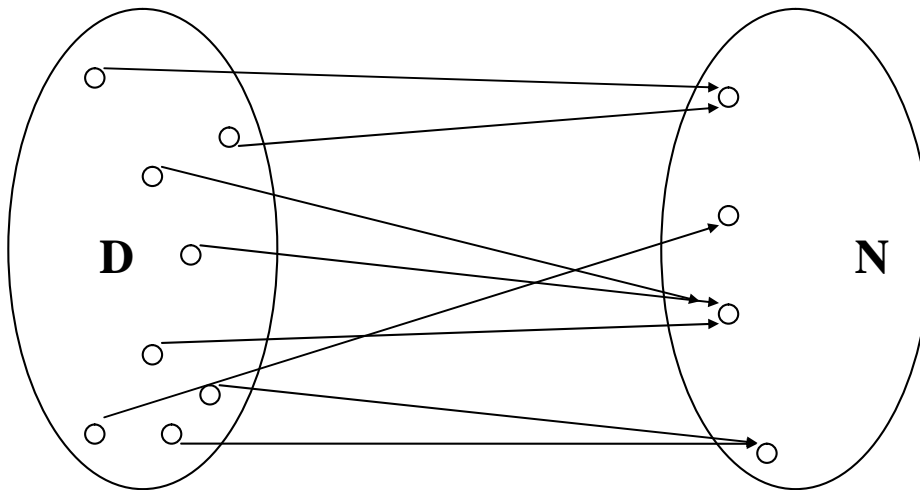


Skalierung



Eine notwendige Bedingung für einen Meßvorgang ist die eindeutige Abbildung. Beispiel:



Diese Art der Abbildung ist zwar eindeutig, aber wenn zu viele Daten aus D wenigen Daten in N (schlimmstenfalls nur einem Datenpunkt) zugeordnet sind, ist diese Messung ohne Aussagekraft. Daher muß man weiter verlangen, daß die Relationen im empirischen System durch das Numerische System adäquat wiedergegeben werden. Eine solche Abbildung nennt man **struktur­erhaltende** oder **homomorphe Abbildung**. Die Definition:

Wenn a in Relation Q_i zu b liegt, dann muß auch $f(a)$ in Relation R_i zu $f(b)$ liegen.

Eine homomorphe Abbildung $f: E \rightarrow N$ heißt **Messung**.

Fragestellungen der Meßtheorie

- Das Repräsentationsproblem:

Ist es überhaupt möglich, zu einem gegebenen empirischen System eine Repräsentation in einem geeigneten numerischen System zu finden?

- Das Eindeutigkeitsproblem:

Es gibt oft nicht nur eine einzige Möglichkeit, ein empirisches System in ein adäquates numerisches System zu überführen. Es gibt also viele verschiedene Meßmethoden, die alle homomorph sind. Die Fragestellung der Meßtheorie ist nun, wie die Gesamtheit aller zulässigen Messungen aussieht und mit welchen Transformationen sich diese Messungen ineinander überführen lassen.

- Das Bedeutsamkeitsproblem:

Was darf man mit der gewählten Messung machen? Bei dieser Fragestellung spielt vor allem das Skalenniveau der erhobenen Daten eine Rolle.

Einteilung nach Skalenniveaus:

f eindeutig bis auf (Möglichkeiten der Transformation)	Bezeichnung	mögliche Auswertungen
alle eindeutigen (injektiven) Zuordnungen	Nominalskala	Auszählung von Häufigkeiten
monotone Transformationen	Ordinalskala	U-Test, Rangkorrelation
lineare Transformationen	Intervallskala	t-Test, Korrelation, Varianzanalyse
Addition einer Konstanten	Differenzskala	wie Intervallskala
(völlig eindeutig)	Absolutskala	z.B. Wahrscheinlichkeiten

Datenklassifikation nach Coombs (1964):

Vergleiche von	Dominanz von Paaren	Nähe von Paaren
Personen mit Reizen	1. Einzelreize (z.B. Leistungstests)	2. Präferenzwahl (z.B. Persönlichkeitstests)
Reizen mit Reizen	3. Reizvergleich (z.B. Leistungs- / Risikovergleich)	4. Ähnlichkeit (z.B. Klassenbildungen)

1.: Einzelreize: Ziel ist die gleichzeitige Skalierung von Reizen und Personen. Beim Leistungstest bekommt eine Person genau dann einen höheren Skalenwert als die Aufgabe, wenn sie diese löst. Wird die Aufgabe nicht gelöst, so bekommt die Person einen niedrigeren Wert als die Aufgabe. Mit anderen Worten: entweder dominiert die Person über die Aufgabe oder die Aufgabe über die Person.

2.: Präferenzwahl: Ziel ist die gleichzeitige Skalierung von Reizen und Personen, wobei die Abstände der Reize von Idealpunkten der Personen die Ergebnisse festlegen. Man nimmt an, daß es für die Personen einen Idealpunkt gibt, der den Reiz mehr oder weniger gut treffen kann. Je weiter der Reiz vom Idealpunkt entfernt ist, desto geringer (niedriger) wird er eingestuft.

3.: Reizvergleich: Es werden Reizpaare dargeboten, die sich auf einer Dimension unterscheiden sollen (z.B. Lautstärke, Helligkeit, Schwere von Verbrechen, Tonhöhe). Ziel ist die Skalierung der Reize nach Dominanz.

4.: Ähnlichkeit: Ziel ist die Beschreibung von Objekten zumindest in Klassen von Objekten. Beispiel: Gegeben sei eine Reihe von Situationen. Gebe zu jeder Situation an, welche andere Situation dieser am ähnlichsten (beziehungsweise am unähnlichsten) bezüglich eines gewissen Merkmals (z.B. Erwünschtheit) ist.

Die Guttman-Skala

	Dominanz von Paaren	Nähe von Paaren
Vergleich Personen - Reize	Guttman-Skala	-
Vergleich Reize - Reize	-	-

Wenn man Personen einem Test unterzieht, dann kann man die Ergebnisse wie folgt kodieren: 1, wenn die Person v die Aufgabe i gelöst hat und 0, wenn die Person v die Aufgabe i nicht gelöst hat. Guttman hatte sich zum Ziel gesetzt, Personen und Aufgaben so auf einer Skala anzuordnen, daß jede Person v eine Aufgabe i genau dann löst, wenn die der Person zugeordnete Zahl größer ist als die der Aufgabe. Gesucht werden also zwei Funktionen f und g :

GS: v löst i genau dann, wenn $f(v) > g(i)$.

Gegeben seien fünf Aufgaben und sechs Personen. Ein mögliches Ergebnis wäre z.B.:

	Aufgabe A	Aufgabe B	Aufgabe C	Aufgabe D	Aufgabe E
Person 1	0	0	0	0	0
Person 2	1	0	0	0	0
Person 3	1	0	0	0	0
Person 4	1	1	1	0	0
Person 5	1	1	1	1	0
Person 6	1	1	1	1	1

Daraus kann man folgende Skala konstruieren:

Skalenwert (f)	0	2	4	6	8
Skalenwert (g)	1	3	5	7	
Aufgaben	A	B,C	D	E	
Personen	X	I	X	I	X
	1	2,3	4	5	6

Die X geben die Skalenwerte der Personen an, die I die Skalenwerte der Aufgaben. Person 6 läge hier also auf höchster Position, weil sie über alle anderen Personen und über alle Aufgaben dominiert, Person 2 und Person 3 dominieren über die Person 1 und über die Aufgabe A, aber nicht über die Personen 4, 5 und 6 und die Aufgaben B, C, D und E. Aufgabe E dominiert beispielsweise über alle Personen außer Person 6, da diese die Aufgabe E gelöst hat. Hätte die Person 6 die Aufgabe E nicht gelöst, so hätte die Aufgabe E den höchsten Skalenwert erhalten, ebenso wie die Aufgabe A den niedrigsten Skalenwert erhalten hätte, wenn sie von allen Personen gelöst worden wäre.

Eindeutigkeitsproblem: Jede Funktion, die die „kleiner gleich“-Relation aufrechterhält, liefert neue zulässige Skalenwerte (diese Funktionen nennt man **monoton** oder **ordnungserhaltend**).

Man darf also quadrieren, die Wurzel ziehen oder einfach obige Skala erhalten.

Bedeutsamkeitsproblem: Die Daten haben Ordinalskalenniveau, man darf also Rangkorrelationen oder U-Tests durchführen. Mittelwerte oder Produkt-Moment-Korrelationen dürfen nicht berechnet werden.

Repräsentationsproblem: Die Hypothese GS beschreibt genau, wie die Repräsentation auszusehen hat. Das Repräsentationsproblem ist aus der Sicht der Meßtheorie also gelöst. Aus der Sicht der Skalierung ist noch nicht so viel geklärt, denn es stellt sich die Frage, wie ich aus vorhandenen Daten eine Guttman-Skala konstruieren soll. Dazu nun ein Beispiel.

Gegeben sei folgende Matrix:

	A	B	C	D	Summen
VP1	0	1	0	0	1
VP2	1	1	0	1	3
VP3	1	1	0	1	3
VP4	0	0	0	0	0
VP5	1	1	1	0	3
VP6	1	1	1	1	4
Summen	4	5	2	3	

Nun sortiert man Zeilen und Spalten der Matrix so, daß die Randsummen der Personen von oben nach unten ansteigen und die Randsummen der Aufgaben von links nach rechts absteigen.

	B	A	D	C	Summen
VP4	0	0	0	0	0
VP1	1	0	0	0	1
VP5	1	1	0	1	3
VP3	1	1	1	0	3
VP2	1	1	1	0	3
VP6	1	1	1	1	4
Summen	5	4	3	2	

Idealmatrix \longrightarrow

	B	A	D	C
	0	0	0	0
	1	0	0	0
	1	1	0	0
	1	1	1	0
	1	1	1	1
	1	1	1	1
Summen	5	4	3	2

Fehlermatrix \longrightarrow

	B	A	D	C
	-	-	-	-
	-	-	-	-
	-	-	-	+
	-	-	-	-
	-	-	-	+
	-	-	-	-
Fehler:	0	0	0	2

Die Idealmatrix erhält man, indem man bei Konstanthalten der Randsummen der Aufgaben die Matrix der Idealform anpaßt. In diesem Fall ergeben sich zwei Abweichungen: Person hätte Aufgabe C nicht lösen sollen, dafür hätte Person 2 diese Aufgabe lösen sollen. Guttman schlägt nun vor, die Güte der empirischen Matrix zu errechnen. Diesen Wert nennt er **Koeffizient der Reproduzierbarkeit**:

$$Rep = 1 - \text{Anzahl Fehler} / (n_A \cdot n_P)$$

, wobei n_A die Anzahl der Aufgaben bezeichnet und n_P die Anzahl der Personen.

In unserem Beispiel wäre $Rep = 1 - 2 / (4 \cdot 6) = 0,917$. In 91,7 % aller Fälle ist die Skala richtig konstruiert. Als Faustregel gilt, daß der Rep über 0,85 liegen sollte. Unsere Matrix wäre also durchaus akzeptabel.

Man kann auch für eine einzelne Aufgabe einen Index errechnen ($Rep_i = 1 - \text{Anzahl Fehler}_i / n_P$).

Man teilt also die Anzahl der Fehler pro Aufgabe durch die Anzahl aller Personen und zieht das Ergebnis von eins ab. Dieser Rep_i sollte auf jeden Fall nicht kleiner als 0,30 sein.

Aufgaben-Charakteristik

Man errechnet die Aufgabenschwierigkeit (Formel unten). Annahme: Wenn man diese Punkte als Skalenwerte (der Dimension „Fähigkeit“) betrachtet, so steigt die Wahrscheinlichkeit für eine Person, eine Aufgabe zu lösen, sprunghaft von 0 auf 1, sobald diese Person den Skalenwert dieser Aufgabe überschreitet.

Die Aufgabenschwierigkeit erhält man, indem man die prozentuierte Summe der nicht gelösten Aufgaben errechnet. Haben von 6 Personen 4 Personen die Aufgabe A gelöst, so ist die Aufgabenschwierigkeit von A $s_A = (6 - 4) / 6$.

Es wird aber angenommen, daß die Wahrscheinlichkeit, die Aufgabe zu lösen, nicht von 0 auf 1 ansteigt, sondern von einem kleinen Wert (z.B. 0.2) auf einen hohen Wert (z.B. 0.8) ansteigt. Diese Vorstellung entspricht der Realität wohl eher als die obige Annahme eines Sprunges von 0 auf 1.

Die Coombs-Skala

	Dominanz	Nähe
Vergleich Reize - Personen	-	Coombs-Skala
Vergleich Reize - Reize	-	-

Gemessen wird meist in Form einer Präferenzwahl. Dabei werden einige Reize (Parteien, Automarken usw.) gegeben, und die Personen werden jeweils gebeten, diese in eine vollständige Rangreihe zu bringen. Zirkuläre Triaden (A besser als B, B besser als C, C besser als A) werden per Instruktion ausgeschlossen.

Die erhobenen Daten werden in eine Matrixform gebracht, was z.B. folgendermaßen aussehen könnte:

	Rangordnungen			
Person 1	C	D	B	A
Person 2	B	C	A	D
Person 3	C	B	D	A
Person 4	A	B	C	D
Person 5	C	B	A	D
Person 6	D	C	B	A
Person 7	B	A	C	D

Für Person 1 ist also C die am meisten bevorzugte Alternative, gefolgt von D, B, und A.

Anspruch der Coombs-Skala ist es, Personen und Reize so auf einer Skala anzuordnen, daß durch den Abstand des Skalenwertes einer Person zu dem eines Reizes die Bevorzugung dieses Reizes abzulesen ist. Gefragt ist also nach folgenden Funktionen f und g:

CS: Person v bevorzugt Reiz i vor Reiz j genau dann, wenn $|f(v) - g(i)| < |f(v) - g(j)|$.

Somit erhält jede Person und jeder Reiz einen Skalenwert. Die Skalenwerte der Personen werden I-Skala genannt (individuelle Skala), die der Reizalternativen nennt man J-Skala (joint scale). Stellt man sich die J-Skala wie eine Schnur vor, auf der die Skalenwerte der Personen und die der Reize aufgetragen sind, so ergibt sich durch Festhalten an einem Personen-Skalenwert und Herunterhängenlassen der Schnur die Möglichkeit, an der Reihenfolge der Reiz-Skalenwerte auf dieser Doppelschnur die I-Skala der jeweiligen Person abzulesen. Der umgekehrte Vorgang nennt sich Entfaltung, weshalb man bei der Coombs-Skala auch von einem Entfaltungsmodell (unfolding) spricht.

Das **Eindeutigkeitsproblem**: in der Entfaltung der I-Skalen steckt mehr als nur Ordinalskalenniveau, man spricht von hyperordinalem Datenniveau.

Somit ergibt sich für das **Bedeutsamkeitsproblem**, daß auf jeden Fall alle Berechnungen, die für Ordinaldaten erlaubt sind, auch für die Daten einer Coombs-Skala zulässig sind. Die Behandlung dieser Daten als Intervalldaten ist hingegen nicht angebracht.

Das **Repräsentationsproblem** ist noch nicht gelöst.

Skalenkonstruktion

Bei n_A Alternativen sind insgesamt $n_A!$ Reihenfolgen möglich. Allerdings sind nach dem

Coombs-Modell nur $\binom{n_A}{2} + 1 = (n_A \cdot (n_A - 1) / 2) + 1$ mögliche Reihenfolgen zulässig. Diese

Einschränkung macht die Skalenkonstruktion von Hand extrem schwierig bis unmöglich, weshalb dazu entsprechende Computerprogramme entwickelt worden sind. Anhand obigen Beispiels soll hier jedoch einmal das Prinzip erläutert werden. Angenommen, es wurden alle möglichen Reihenfolgen beobachtet.

Schritt 1: Unter diesen Idealbedingungen gibt es nur zwei Reihenfolgen, die zueinander völlig spiegelbildlich sind. Diese Reihenfolgen stammen von den zwei Personen, die letztendlich ganz links und ganz rechts auf der J-Skala zu finden sind. Im Beispiel sind dies die Personen 4 (ABCD) und 6 (DCBA).

	Rangordnungen				
Person 1	C	D	B	A	
Person 2	B	C	A	D	
Person 3	C	B	D	A	
Person 4	A	B	C	D	← ganz links
Person 5	C	B	A	D	
Person 6	D	C	B	A	← ganz rechts
Person 7	B	A	C	D	

Man startet also auf der J-Skala mit der Reihenfolge $A < B < C < D$.

Schritt 2: Man sucht nun nach der Reihenfolge, bei der gegenüber der ersten Reihenfolge genau zwei Alternativen vertauscht sind. Im Beispiel wäre dies das Rating der Person 7 (BACD). Dann wird nach der nächsten Reihenfolge gesucht, die gegenüber dieser zweiten Reihenfolge wiederum nur eine Vertauschung aufweist usw. Bei Idealdaten gibt es zu jeder Reihenfolge nur eine andere, bei der nur zwei Daten vertauscht sind (bzw. sind die Daten nur dann zulässig, wenn dies so ist). Durch hierarchische Anordnung ergibt sich folgende Matrix:

Person 4	A	B	C	D	←	ganz links
Person 7	B	A	C	D		A und B vertauscht
Person 2	B	C	A	D		A und C vertauscht
Person 5	C	B	A	D		C und B vertauscht
Person 3	C	B	D	A		A und D vertauscht
Person 1	C	D	B	A		D und B vertauscht
Person 6	D	C	B	A	←	

Letzter Schritt: Die Skalenkonstruktion

Es fehlen jetzt nur noch die metrischen Informationen. Die erhält man, indem man die Reihenfolge der Mittelpunkte ad und bc ermittelt. Da C und B vor A und D vertauscht wurden, gilt: $bc < ad$. Eine mögliche Lösung dieses Skalierungsproblems wäre also:

$s(A) = 1$; $s(B) = 2$; $s(C) = 3$; $s(D) = 4 + \delta$, wobei δ irgendeine positive Zahl sein kann.

Ergänzung: Mittelpunktabstände der folgenden Form sind gleich:

$$d(ab, cb) = d(ae, ce)$$

a und c stehen in beiden Klammern an gleicher Stelle (bzw. können an gleicher Stelle stehen), und das b in der linken Klammer ist in der rechten Klammer durch e ersetzt. Alle gleichen Mittelpunktabstände werden also mit dem gleichen Wert skaliert (meist wird der Wert 1 als Mittelpunktabstand genommen). Alle anderen Mittelpunktabstände ergeben sich dann aus Umformungen.

Die Parallelogramm-Skala

	Dominanz	Nähe
Vergleich Reize - Personen	-	Parallelogramm-Skala
Vergleich Reize - Reize	-	Parallelogramm-Skala

Personen wird eine Anzahl Alternativen dargeboten, von denen sie beliebig viele auswählen können und die restlichen nicht (es gibt also wieder nur zwei Werte: 1 und 0). Beispiele:

- 1.: Welche Produkte aus folgender Liste sind für Sie etwa gleichwertig?
- 2.: Welche Attribute der folgenden Liste sind für Situation x charakteristisch?
- 3.: Gegen welchen Tennisspieler aus Ihrem Club würden Sie am liebsten spielen?
- 4.: Neben welchem Mitschüler würdest Du am liebsten sitzen?

Die Fragen 1 und 2 beziehen sich auf zwei Mengen (Personen beurteilen Reize), während die Fragen 3 und 4 nur jeweils eine Menge, nämlich Personen (formal gesehen handelt es sich jedoch „nur“ um Reize) behandeln.

Bezogen auf zwei Mengen könnte man z.B. folgende Matrix erhalten:

	Alternative			
	A	B	C	D
Person 1	0	1	0	1
Person 2	1	0	1	0
Person 3	0	1	0	0
Person 4	1	1	0	1
Person 5	1	0	0	1

Person 1 findet die Alternativen B und D gut (charakteristisch, wünschenswert etc.) und lehnt Alternative A und C ab, während Person 2 genau andersherum urteilt.

Bezogen auf eine Menge (gegen wen würden Sie am liebsten Tennis spielen?) könnte die Matrix zum Beispiel so aussehen:

	Person 1	Person 2	Person 3	Person 4	Person 5
Person 1	_____	1	0	0	0
Person 2	1	_____	1	0	0
Person 3	0	1	_____	1	1
Person 4	0	0	1	_____	1
Person 5	0	0	1	1	_____

Die Hypothese der Parallelogramm-Skala läßt sich wie folgt formulieren:

PH: v wählt i genau dann, wenn $|f(v) - g(i)| \leq \epsilon$.

Man spricht auch von einer ϵ -Gleichheit. ϵ bezeichnet also einen Wert, den die Person unterschreiten muß, um die Alternative zu wählen, und den sie überschreiten muß, um sie abzulehnen.

Dementsprechend findet man bei großem ϵ eine große Reizmenge (wegen hoher „Toleranz“) und bei kleinem ϵ nur kleine Reizmengen oder gar nur einzelne Werte. Diese Folgen ergeben sich jedoch nur, wenn man annimmt, daß ϵ für jeden Reiz gleich ist, daß also eine Person für jede Alternative den gleichen Maßstab anlegt. Für mittleres ϵ können die Kategorien „verschmieren“, was im Extremfall zu Ordinalskalenniveau führen kann (im Gegensatz zu Nominalskalenniveau bei großem oder kleinem ϵ). Das erste Beispiel ist ein solches. Nach Umsortierung erhält man folgende Matrix:

	B	D	A	C
Person 3	1	0	0	0
Person 1	1	1	0	0
Person 4	1	1	1	0
Person 5	0	1	1	0
Person 2	0	0	1	1

Diese Matrix zeigt eine Parallelogramm-Struktur. In diesem Beispiel haben wir, wie gesagt, Ordinalskalenniveau. Das Problem bei der Parallelogramm-Skala ist, daß man die Datenqualität erst nach der Datenerhebung feststellen kann.

Skalenkonstruktion

Die Aufgabe ist es, die Sortierung von Reizen und Personen zu finden, die einer Parallelogramm-Struktur am nächsten kommt. Mit anderen Worten muß man getrennt für Personen und Reize jeweils eine Sortierung finden, in der es möglichst wenig Übergänge von 0 auf 1 und von 1 auf 0 gibt. Mathematisch gesehen sucht man nach Permutationen ρ (der Objekte) und σ (der Personen), die folgende Funktionen maximieren:

$$S(\sigma) = \max_{\sigma} \sum_{v=1}^{n_p} \sum_{i=1}^{n_A} x_{\sigma(v),i} (x_{\sigma(v+1),i} + x_{\sigma(v-1),i})$$

$$S(\rho) = \max_{\rho} \sum_{i=1}^{n_A} \sum_{v=1}^{n_p} x_{v,\rho(i)} (x_{v,\rho(i)} + x_{v,\rho(i-1)})$$

, wobei $x_{\sigma(0),i} = x_{\sigma(n_p+1),i} = x_{v,\rho(0)} = x_{v,\rho(n_A+1)} = 0$ für alle Personen v und alle Items i gesetzt wird.

Für das Beispiel mit 5 Personen und 4 Reizen ergibt sich z.B.:

Ausgangssortierung					optimale Sortierung				
Person	Alternative				Person	Alternative			
	A	B	C	D		B	D	A	C
1	0	1	0	1	3	1	0	0	0
2	1	0	1	0	1	1	1	0	0
3	0	1	0	0	4	1	1	1	0
4	1	1	0	1	5	0	1	1	0
5	1	0	0	1	2	0	0	1	1

Mit den numerischen Werten:

Ausgangssortierung	S (ABCD) = 2 S (12345) = 6
optimale Sortierung	S (BDAC) = 10 S (31425) = 18

Für die Darstellung von nur einer Menge gilt es, die Permutation σ zu finden, die folgende Funktion maximiert:

$$\max_{\sigma} \sum_{i=1}^{n_A} \sum_{j=1, j \neq i}^{n_A} x_{\sigma(i),\sigma(j)} (x_{\sigma(i+1),\sigma(j)} + x_{\sigma(i-1),\sigma(j)}) + x_{\sigma(j),\sigma(i)} (x_{\sigma(j),\sigma(i+1)} + x_{\sigma(j),\sigma(i-1)})$$