Vektoren und Matrizenrechnung

5.1 Was ist ein Zeilen-, ein Spaltenvektor, ein Matrix? Wann sind zwei Vektoren oder Matrizen gleich, ungleich, inkommensurabel?

Was ist ein Zeilen-, ein Spaltenvektor, ein Matrix?

• Die Datenmatrix ist eine ***tabellenförmige Anordnung von Daten***.

Eine tabellenförmige Anordnung von Zahlen, bzw. Daten (z.B. von n Personen, die in m Variablen getestet wurden) in mehreren Zeilen und Spalten. Die Anzahl der Zeilen und Spalten gibt die Größe bzw. die Ordnung der Matrix an. Eine n x m–Matrix hat n Zeilen und m Spalten. Die einzelnen Werte der Matrix werden Elemente genannt. Die Gesamtmatrix wird durch einen fettgedruckten Großbuchstaben gekennzeichnet.

$$\mathbf{X} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ i \\ m \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 \;\ldots & j & \ldots\; n \end{array} \\ \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -5 & 0 & 4 \\ 6 & 2 & -1 \end{pmatrix} \end{array}$$

In der oben genannten Matrix X lautet das Element X23 = 4. Der erste Index gibt an, in welcher Zeile der Matrix und der 2. Index, in welcher Spalte der Matrix das Element steht. Das folgende Beispiel zeigt die allgemeine Schreibweise der Elemente einer 3 x 4-Matrix.

$$A = \begin{pmatrix} a11 & a12 & a13 \\ a21 & a22 & a23 \\ a31 & a32 & a33 \end{pmatrix}$$

• Die Zeilen der Matrix heißen ***Zeilenvektoren.*** Ein Zeilenvektor enthält alle Daten ***eines Items*** (z.B. einer Variablen) ***über alle Personen*** hinweg.

Schreibweise:

$$\mathbf{u}' = (u_1, u_2, \ldots\ldots u_n)$$

• Die Spalten einer Matrix heißen ***Spaltenvektoren***. Ein Spaltenvektor enthält die Daten jeweils ***einer Person über alle Variablen***/Items hinweg.

Schreibweise:

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \\ V_n \end{pmatrix}$$

→ Die Datenmatrix enthält die Rohdaten für die Berechnung einer Faktorenextraktion.

• Besteht eine Matrix aus nur einer Zeile (oder Spalte), so sprechen wir von einem ***Vektor***.

Wann sind zwei Vektoren oder Matrizen gleich, ungleich, inkommensurabel?

→ Zwei Matrizen A und B sind dann ***gleich***, wenn alle Elemente a_{ik} aus A gleich den Elementen b_{ik} aus B sind. (= wenn ihre Elemente exakt übereinstimmen, d.h. auch die Stellen an denen die Elemente stehen genau überein stimmen.) Man spricht von Matrizen ***gleicher Ordnung***, wenn sie die gleiche Anzahl von Spalten und Zeilen aufweisen.

→ Sie sind ***ungleich***, wenn dies nicht der Fall ist.

→ Unter ***inkommensurablen Matrizen*** versteht man solche, die nicht vergleichbar sind (=nicht meßbar, nicht mit den gleichen Maßen zu messen, nicht vergleichbar).

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 7 \\ 0 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

⇨ Diese beiden Matrizen sind inkommensurabel → man kann sie z.B. nicht mit einander multiplizieren.

5.2 Wie werden Vektoren und Matrizen addiert, subtrahiert und multipliziert? Was versteht man bei einer Matrix (und sinngemäß Vektoren) unter Transposition? Was versteht man unter einer symmetrischen Matrix? Wie heißt die Umkehroperation zur Matrizenmultiplikation? Wie wird sie berechnet (im Prinzip, keine technischen Einzelheiten)? Was versteht man unter einer Diagonalmatrix, was unter der Identitätsmatrix?

Wie werden Vektoren und Matrizen addiert, subtrahiert und multipliziert?

Addition/Subtraktion:

• **Vektorenaddition bzw. – subtraktion**:

$\bar{a} = (7,8,4)$

$b\ (3,9,2)$

➔ $\bar{c} = \bar{a} + \bar{b} = (10,17,6)$

• **Matrizenaddition bzw. – subtraktion:**

$$X = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Y = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 7 & 8 \end{bmatrix}$$

➔ $$\bar{Z} = \bar{X} + \bar{Y} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 10 & 8 \end{bmatrix}$$

⇨ Man addiert/subtrahiert zwei Matrizen, indem man die jeweils korrespondierenden Elemente addiert/subtrahiert:

Multiplikation:

• **Vektorenskalarprodukt**:

$$\vec{x} \times \vec{y} = x_1 \times y_1 + x_2 \times y_2 + ... + x_m y_m = \sum_{i=1}^{m} x_i \times y_i$$

Beispiel: $\bar{a} \bullet \bar{b} = 7\bullet 3+8\bullet 9+4\bullet 2=101$

⇨ Das Skalaprodukt ergibt ein Skalar. Mit nur einer Zahl malgenommen, ergibt sich ein Vektor

• **Matrizenmultiplikation**:

⇨ Das Produkt einer Matrix ist wieder eine Matrix

⇨ Bei der Multiplikation zweier Matrizen ist die Reihenfolge sehr wichtig, d.h., dass die Multiplikation nicht kommutativ ist (A*B ⇔ B*A)

$\bar{C} = \bar{A} \bullet \bar{B}$

→ $c_{ij} = \bar{a}_i \bullet \bar{b}_j = \sum a_{ik} \bullet b_{kj}$

$\bar{a}_i$ = i-ter Zeilenvektor von $\bar{A}$

$\bar{b}_j$ = j-ter Spaltenvektor von $\bar{B}$

Beispiel:

$$\bar{B} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \\ 4 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 7 \\ 1 & 8 & 5 & 4 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 47 & 39 & 53 \\ 47 & 35 & 71 \end{bmatrix} = \bar{C}$$

➔ $4 \times 2 + 3 \times 3 + 2 \times 1 + 7 \times 4 = 47$

Was versteht man bei einer Matrix (und sinngemäß Vektoren) unter Transposition?

Unter Transposition versteht man, wenn man die Zeilen und Spalten miteinander vertauscht.
Eine transponierte Matrix erhält man, indem jede Zeile der ursprünglichen Matrix als Spalte geschrieben wird. Die Transponierte einer Matrix wird durch einen Strich gekennzeichnet.
Beispiel ($\bar{A}$ siehe oben):

$$\bar{A}' = \begin{matrix} 4 & 1 \\ 3 & 8 \\ 2 & 5 \\ 7 & 4 \end{matrix}$$

Was versteht man unter einer symmetrischen Matrix?

Eine Matrix ist quadratisch, wenn sie genauso viele Zeilen wie Spalten hat. Sie ist zusätzlich symmetrisch, wenn jedes Element (i, j) dem Element (j, i) gleicht.

Wie heißt die Umkehroperation zur Matrizenmultiplikation?

Umkehroperation zur Matrizenmultiplikation = **Inversion**
$\bar{A} \bullet \bar{A}^{-1} = \bar{I}$ → Gl. (C 19): Man sucht also zu einer Matrix $\bar{A}$, die Inverse $\bar{A}^{-1}$, die miteinander multipliziert die entsprechende Identitätsmatrix ergeben.

Wie wird sie berechnet (im Prinzip, keine technischen Einzelheiten)?

Das Rechnen mit den Inversen einer Matrix entspricht der Division in der numerischen Algebra. Das Produkt der beiden Matrizen ergibt die Identitätsmatrix. Unter Identitätsmatrix versteht man eine quadratische Matrix, bei der alle Glieder der Hauptdiagonalen 1 sind, der Rest ist gleich 0. Der rechnerische Aufwand ist enorm, auch in der Prüfung werden keine technischen Einzelheiten benötigt.

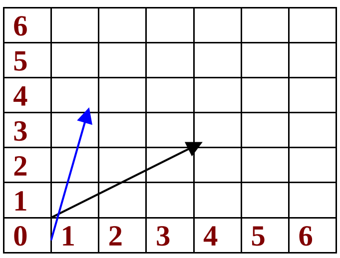
Was versteht man unter einer Diagonalmatrix, was unter der Identitätsmatrix?

Eine Diagonalmatrix liegt vor, wenn sich in einer quadratischen Matrix außerhalb der Hauptdiagonalen, die von links oben nach rechts unten verläuft, nur Nullen befinden.
Identitätsmatrix.
Eine Diagonalmatrix heißt Identitätsmatrix (Einheitsmatrix), wenn alle Hauptdiagonalelemente den Wert 1 haben.

5.3) Wie wird ein Vektor, wie eine Matrix graphisch dargestellt?

Vektor graphisch:

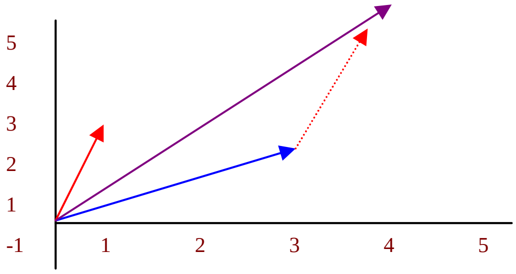
ā = (3, 2) ← Die erste Zahl beschreibt die Lage zu der Abszisse (= X-Achse) und die zweite Zahl beschreibt die Lage zu der Ordinate (= Y-Achse), hier befindet sich das „Ende“ des Vektorpfeils, der Anfang liegt im Nullpunkt



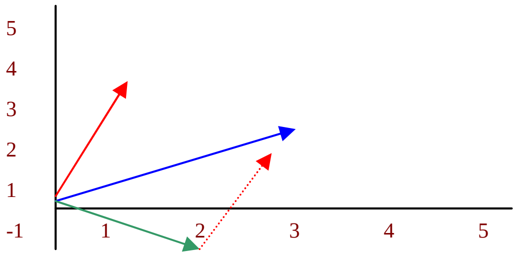
a = (3,2) (3 = Abszisse, 2 = Ordinate)
b = (1,3)

Graphische Darstellung von Addition und Subtraktion:

ā + ē = ī [ē = (1, 3) ī = (4, 5)]



ā - ē = ō [ē = (1, 3) ō = (2, -1)]



Matrix graphisch:

Indem man die Zeilen zu den Koordinaten und die Spalten zu den Vektorpfeilen macht, oder umgekehrt.

5.4) Was versteht man unter dem Betrag eines Vektors, was unter der Distanz zweier Vektoren?

Betrag eines Vektors:

Die Länge eines Vektorfeiles in den entsprechenden Einheiten

Distanz zweier Vektoren:

Der Abstand zwischen zwei Vektoren